РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА
ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (Тестовый экзамен 2016 — решения)

Код

00000

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Заштрихуйте на бланке ответов и обведите кружком в условии тот единственный ответ (из A, B, C, D, E), который вы считаете правильным. Каждый правильный ответ оценивается в одно очко. Неправильный — в минус четверть очка. Отсутствие ответа — ноль очков. Если с точки зрения экзаменатора предложенный ответ однозначно установить невозможно, то считается, что ответ отсутствует. В случае расхождений приоритет отдается отметкам на бланке ответов.

1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки 0, причем $f(0) = g(0) = 0$. Тогда

A функция $f(g(x))$ определена в некоторой окрестности точки 0, причем $f(g(0)) = 0$

B если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то и функция $g(f(x))$ непрерывна в точке 0

C если функция $f(x)$ разрывна в точке 0, то и функция $g(f(x))$ разрывна в точке 0

D если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке 0, то и функция $\operatorname{arctg}(f^2(x) + g^2(x))$ непрерывна в точке 0.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Квадрат и арктангенс — функции, непрерывные в точке 0, так же как сумма и композиция функций, непрерывных в точке 0. A неверно, поскольку $g(x)$ может принимать значения вне окрестности 0, для которых $f(x)$ не определена. B неверно, например, для $f(x) = x$ и $g(x) = \operatorname{sign} x$. C неверно, например, для $f(x) = \operatorname{sign} x$ и $g(x) = 0$.

2. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной прямой. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{tg} f(x)$ достигает наибольшего значения

B если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{arctg} f(x)$ достигает наибольшего значения

C если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

D если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Поскольку арктангенс монотонно возрастает на всей вещественной прямой, наибольшему значению аргумента будет соответствовать наибольшее значение арктангенса. Тангенс не ограничен и не будет достигать наибольшего значения, если область значений $f(x)$ содержит левую полуокрестность точки его разрыва. Контрпримерами для утверждений C и D являются $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \operatorname{arctg} x$ соответственно.

3. Функция $f(x, y) = \mathrm{tg}(\pi xy/2)$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

C достигает наибольшего значения ровно в шести точках

D достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

Решение: Делая замену $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi)$, получаем

$$\pi xy/2 = \pi \cos t \sin t/2 = \pi \sin 2t/4.$$

Поскольку синус принимает значения от -1 до 1, то аргумент тангенса на указанном множестве изменяется от $-\pi/4$ до $\pi/4$. Следовательно, функция f достигает наибольшего значения в точках, в которых $\sin 2t = 1$, т. е. при $t = \pi/4$ и $t = 5\pi/4$.

4. Функция $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + 4xy + 4y^2 = 2\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

Решение: Уравнение, задающее ограничение, можно переписать как $(x + 2y)^2 = 2$ или $x = -2y \pm \sqrt{2}$. Тогда $f = 2(4y^2 + 2 \mp 4\sqrt{2}y) + y^2$. Легко видеть, что $f \to +\infty$ при $y \to \pm\infty$, то есть функция не достигает наибольшего значения.

5. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в двух точках, не совпадающих ни с 0, ни с 1. Тогда

A функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее, чем в трех точках

B функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения не менее, чем в двух точках

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$, то производная $f'(x)$ равна нулю не менее, чем в трех точках

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее чем в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Если функция дифференцируема в точках максимума, то производная в этих точках равна нулю. Кроме того, поскольку значения функции в этих двух точках равны, то по теореме Ролля на интервале между ними производная функции также хотя бы раз обратится в ноль. Функция $f(x) = \sin(3\pi x) - 1$, достигающая на $[0, 1]$ наименьшего значения в точке $1/2$ и наибольшего — в точках $1/6$ и $5/6$, является контрпримером для утверждений A, B и D.

6. Функция $f(x)$ отображает отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, 1]$. Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна, то существует точка x такая, что $f(x) = x$

B если функция $f(x)$ монотонно убывает, то существует точка x такая, что $f(x) = x$

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$ то существует точка x в интервале, такая, что $f'(x) = 0$

D если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$ то существует точка x в интервале, такая, что $f'(x) = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Если $f(x)$ непрерывна, то функция $f(x) - x$ также непрерывна, в точке 0 принимает значение из $[0, 1]$, а в точке 1 — значение из $[-1, 0]$. Поскольку непрерывная функция принимает на отрезке все значения между значениями на концах отрезка, эта функция хотя бы в одной точке обратится в ноль. B неверно, например, для $f(x) = \begin{cases} 1 - x/2, & x \in [0, 1/2] \\ 1/2 - x/2, & x \in (1/2, 1] \end{cases}$. C и D неверны, например, для $f(x) = x/2$.

7. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - 1 - x - x^2}{x^2}$

A равен 0

B равен 1/2

C равен −1/2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

Решение: По формуле Тейлора $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 + o(x^2)$. Получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 - x - x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x - x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{2} + o(1) \right) = \infty$$

из-за первого слагаемого.

8. Предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2 - x) - x + x^2}{\ln x + x - x^2}$

A равен −3

B равен −1

C равен 3

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

Решение: Применяя дважды правило Лопиталя для разрешения неоднозначности $\dfrac{0}{0}$, получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2 - x) - x + x^2}{\ln x + x - x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1/(x - 2) - 1 + 2x}{1/x + 1 - 2x} = \lim_{x\to 1} \frac{-1/(x - 2)^2 + 2}{-1/x^2 - 2} = -\frac{1}{3}$$

9. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{3}{k^2 - k - 2}$

A равен 0

B равен 1/3

C равен $\dfrac{\ln 2}{2}$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

Решение: Поскольку $\dfrac{3}{k^2 - k - 2} = \dfrac{1}{k - 2} - \dfrac{1}{k + 1}$, то при не слишком маленьком n из-за сокращения слагаемых получается

$$\frac{1}{n} \sum_{k=3}^{n} \frac{3}{k^2 - k - 2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

10. Сумма ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 7}}+\dots$$

равна

A $\sqrt{2}$

B $2\sqrt{3}$

C $3\sqrt{3}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

Решение: Общий член ряда положителен и может быть оценён снизу как

$$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}>\frac{1}{2n}.$$

Поскольку гармонический ряд расходится, то по признаку сравнения данный ряд также расходится.

11. Пусть $f(x,y)=x^2+y^2$ и $M=\{(x,y)\colon x^2y=1\}$. Тогда

A функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наибольшего значения ровно в одной точке

B функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наименьшего значения ровно в одной точке

D функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наименьшего значения ровно в двух точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Учитывая, что точки с $x=0$ не входят в M, выражаем из ограничения $y=1/x^2$. Подставляя в выражение для f, получаем $f(x)=x^2+1/x^4$. Производная $f'(x)=2x-4/x^5$ обращается в ноль при $x_{1,2}=\pm\sqrt[6]{2}$. Поскольку при $x\to 0$ и при $x\to\pm\infty$ функция $f\to+\infty$, то в этих двух точках достигается наименьшее значение, а наибольшее не достигается.

12. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^3+y^3+2x^2y^2=17$. Через точку $(1,2)$ проведена касательная $y=kx+b$ к этой кривой. Тогда угловой коэффициент k этой касательной равен

A 19/20

B $-19/20$

C 20/19

D $-20/19$

E числу, отличному от перечисленных в A–D

Решение: Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке равен производной функции в этой точке. Считая y функцией от x и дифференцируя уравнение по x, получаем

$$3x^2+3y^2y'+4xy^2+4x^2yy'=0.$$

В точке $(1,2)$ это равенство принимает вид

$$3+12y'+16+8y'=0\quad\Leftrightarrow\quad y'=-\frac{19}{20}.$$

13. Даны матрицы A и B размера $m \times n$, где $m, n \geqslant 2$, у которых строки линейно независимые. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X. Тогда

A матрица AA^T невырожденная

B матрица B^TB невырожденная

C матрица AB^T невырожденная

D матрица A^TB невырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Если матрица AA^T вырождена, то найдется ненулевой вектор x, такой что $AA^Tx = 0$. Тогда $(A^Tx)^2 = (x^TA)(A^Tx) = x^T(AA^Tx) = 0$ и, следовательно, $A^Tx = 0$. Но последнее равенство есть ни что иное как равенство нулю нетривиальной линейной комбинации строк матрицы A с коэффициентами, равными компонентам вектора x, что противоречит условию. Поскольку строки матриц линейно независимы, то $m \leqslant n$ и $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = m$. Так как ранг произведения матриц не превосходит минимума рангов сомножителей, а матрицы в пунктах B и D имеют размерность $n \times n$, то при $n > m$ они необходимо будут вырожденными. Если взять матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то можно убедиться, что матрица AB^T будет вырожденной.

14. В линейном пространстве даны две системы векторов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Через L_X и L_Y обозначим линейные оболочки систем X и Y соответственно, а через $\dim L_X$ и $\dim L_Y$ — их размерности. Тогда

A если $n > m$, то $\dim L_X > \dim L_Y$

B если $\dim L_X > \dim L_Y$ и система Y линейно независимая, то $n > m$

C если $\dim L_X > \dim L_Y$ и система X линейно зависимая, то $n > m$

D если $\dim L_X = \dim L_Y$, то $n = m$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Если система Y линейно независимая, то $\dim L_Y = m$. Учитывая, что размерность линейной оболочки не больше количества векторов в системе, для случая B получаем $n \geqslant \dim L_X > \dim L_Y = m$. Если взять все векторы в системах X и Y нулевыми и при этом $n > m$, то $\dim L_X = \dim L_Y = 0$ и это опровергает утверждения A и D. В случае C можно дополнить систему Y нулевыми векторами, не изменяя ее размерность, пока не станет $m \geqslant n$.

15. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Решение: Вычитая из 2-й строки 1-ю, умноженную на 5, а из 3-й — 1-ю, умноженную на 4, получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -16 & 2 \\ 0 & -3 & -16 & 2 \end{pmatrix}$, ранг которой совпадает с рангом исходной матрицы. Поскольку 2-я и 3-я строки матрицы совпадают, а первые две строки очевидно линейно независимы, ранг этой матрицы, как и исходной, равен 2.

16. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ равен

A -1

B 0

C 1

D 2

E не существует

Решение: Вычисляя определитель непосредственно, получаем, что он равен

$1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1 - 1 + 0 - 0 + 2 - 1 = -1$

17. Квадратичная форма $f(x) = x^T Ax$ в R^3 задана матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Тогда

A квадратичная форма $f(x)$ положительно определена

B квадратичная форма $f(x)$ положительно полуопределена

C квадратичная форма $f(x)$ отрицательно определена

D квадратичная форма $f(x)$ знакопеременная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Отметим, что применение этой функции к вектору (1;0;0) даёт число 1, а к вектору (0;0;1) — число -5. Следовательно, эта форма знакопеременная.
Второй способ: по критерию Сильвестра, можно посчитать определители трёх миноров матрицы (т.е. "определитель"элемента a_{11}, определитель матрицы 2×2 из первых двух строк и столбцов, определитель всей матрицы 3×3). Как мы видим, первый определитель равен 1, второй — 2, а третий —

$$1 \times 3 \times (-5) - 1 \times (-1) \times (-1) - 1 \times 1 \times (-5) = -15 - 1 + 5 = -11.$$

По критерию Сильвестра, это означает, что квадратичная форма является знакопеременной.

18. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Выберите *ложное* утверждение

A матрица A является проектором на одномерное подпространство

B матрица A является невырожденной матрицей

C матрица A является ортогональной матрицей

D матрица A является кососимметричной матрицей

E матрица A является квадратной матрицей

Решение: Поскольку детерминант матрицы равен 1, она автоматически невырожденная и не может быть проектором на одномерное подпространство. Остальные утверждения верны (невырожденность мы показали; ортогональность означает, что строки ортогональны и имеют длину 1 — это верно; кососимметричность означает, что её элементы вне диагонали равны со знаком минус; квадратная матрица — это матрица с равным количеством строк и столбцов).

19. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

A матрица A имеет три разных вещественных собственных числа

B у матрицы A для всех вещественных собственных чисел их геометрическая кратность совпадает с алгебраической

C ноль является собственным числом матрицы A, и размерность соответствующего собственного подпространства равна 2

D наибольшее вещественное собственное число матрицы A равно 2

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Для нахождения собственных чисел матрицы A построим ее характеристический многочлен:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{раскладываем} \\ \text{по 3-му столбцу} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda+1) + (2-\lambda)(\lambda^2 - 1 + 2) = \lambda^2(2-\lambda).$$

Собственное число 0 имеет алгебраическую кратность 2, и собственное число 2 — кратность 1. Для определения геометрической кратности собственного числа 0 найдем размерность пространства решений системы $Ax = 0$. Вычитая 1-ю строку матрицы из двух других строк, получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, имеющую такой же ранг, как и A, очевидно равный 2. Следовательно, размерность собственного подпространства, соответствующего собственному числу 0, равна $(3-2) = 1$.

20. Симметричная матрица A задает оператор проектирования в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, где $n \geqslant 3$, причем известно, что матрица A не является ни нулевой, ни единичной. Через x^T обозначим строку, транспонированную к столбцу x. Тогда

A множество $\{x \in \boldsymbol{R}^n : x^T A x = 1\}$ ограниченное

B множество $\{x \in \boldsymbol{R}^n : x^T A x = -1\}$ неограниченное

C множество $\{x \in \boldsymbol{R}^n : x^T A x = 0\}$ ограниченное

D множество $\{x \in \boldsymbol{R}^n : x^T A x = 0\}$ является подпространством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Поскольку матрица A симметрична и задает оператор проектирования, то $x^T A x = x^T A A x = x^T A^T A x = (Ax)^2$. Поэтому условие в пункте D эквивалентно $Ax = 0$, и оно задает подпространство. Условие в пункте B эквивалентно $(Ax)^2 = -1$ и задает пустое, а следовательно, ограниченное множество. Если взять матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, множества в пунктах A и C будут неограниченны.

21. Облигация платит 100 рублей через год с вероятностью 0.8 и 0, с вероятностью 0.2. Страховка CDS платит -10 рублей, если облигация платит 100 рублей, и 100 рублей, если облигация платит 0. Чему равно математическое ожидание платежа портфеля из облигации и CDS?

A 0 рублей

B 72 рубля

C 90 рублей

D 92 рубля

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Если облигация заплатит 100, то общий платёж будет равен 90, а если облигация заплатит 0, то общий платёж будет равен 100. Вероятности этих двух событий равны 80% и 20%. Тогда ожидаемое значение платежа равно

$$90 \times 0.8 + 100 \times 0.2 = 92.$$

22. Цена акции в конце каждого года увеличивается на 10% с вероятностью 1/2 и уменьшается на 10% с вероятностью 1/2. Какова вероятность того, что через 2 года цена акции будет такой же, как сегодня?

A 0%

B 25%

C 50%

D 75%

E 100%

Решение: За два года цена акции может вырасти два раза, тогда её цена будет больше сегодняшней в $1.1^2 = 1.21$ раза; либо упасть два раза, тогда её цена будет меньше в $1.1^2 = 1.21$ раза; либо один раз вырасти и один раз упасть, и тогда её конечная стоимость будет $1.1 \times 0.9 = 0.99$ от сегодняшней. Соответственно, нет возможности, что цена акции будет равна сегодняшней, вероятность ноль.

23. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0,2]. Случайная величина Y независима от X и распределена по Гауссу со средним 1 и дисперсией 0. Чему равна вероятность $P(X < Y)$?

A 0

B 1/8

C 1/4

D 3/8

E 1/2

Решение: Поскольку Y имеет дисперсию 0, то она равна 1 с вероятностью 1. Тогда

$$P(X < Y) = P(X < 1) = 0.5.$$

24. Даны две компании. Вероятность дефолта первой из них равна 0.1, а вероятность дефолта обеих компаний вместе равна 0.08. Чему равна вероятность того, что произойдет дефолт во второй компании при условии, что в первой он произошел?

A 0.08

B 0.16

C 0.2

D 0.4

E 0.8

Решение: По формуле условной вероятности,

$$P(default \quad second|default \quad first) = P(default \quad first, default \quad second)/P(default \quad first) = 0.8.$$

25. Вы купили акцию предприятия, которое может оказаться «хорошим» или «плохим» с вероятностью 0.5. Акция «хорошего» предприятия с вероятностью 1 через год вырастет в цене. Акция «плохого» предприятия через год с вероятностью $1/4$ вырастет, а с вероятностью $3/4$ упадет в цене. Через год цена купленной акции выросла. Какова вероятность того, что это акция «хорошего» предприятия?

A $1/3$

B $1/2$

C $2/3$

D $3/4$

E $4/5$

Решение: По формуле Байеса,

$$P(good\,firm|stock\,appreciates) =$$
$$= \frac{P(stock\,appreciates|firm\,good)P(firm\,good)}{P(stock\,appreciates|firm\,good)P(firm\,good) + P(stock\,appreciates|firm\,bad)P(firm\,bad)}.$$

Подставляя числа, получаем

$$\frac{1 \times 0.5}{1 \times 0.5 + 0.25 \times 0.5} = 0.8.$$